BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP

BÁO CÁO TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CỦA SINH VIÊN

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHO HAI ÁNH XẠ CO SUY RỘNG TRONG KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC

Mã số: CS2013.02.31

Chủ nhiệm đề tài: SV Nguyễn Thị Ánh Nguyệt

Đồng Tháp, 4/2014

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP

BÁO CÁO TỔNG KẾT

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CỦA SINH VIÊN

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHO HAI ÁNH XẠ CO SUY RỘNG TRONG KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC

Mã số: CS2013.02.31

Xác nhận của	**Chủ nhiệm đề tài**
Chủ tịch HĐ nghiệm thu	

Nguyễn Thị Ánh Nguyệt

Đồng Tháp, 4/2014

MỤC LỤC

BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO **CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP **Độc lập - Tự do - Hạnh phúc**

TÓM TẮT KẾT QUẢ ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CỦA SINH VIÊN

Tên đề tài: Định lí điểm bất động chung cho hai ánh xạ co suy rộng trong không gian kiểu-mêtric

Mã số: CS2013.02.31

Chủ nhiệm đề tài: Nguyễn Thị Ánh Nguyệt

Tel.: 01648425879 E-mail: nguyenngyuet10A@gmail.com

Cơ quan chủ trì đề tài: Trường Đại học Đồng Tháp

Cơ quan và cá nhân phối hợp thực hiện: Không

Thời gian thực hiện: 4/2013 đến 4/2014

1. Mục tiêu: - Hệ thống những khái niệm, tính chất cơ bản của điểm bất động chung cho ánh xạ tương thích yếu thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng và không gian kiểu-mêtric.

- Chi tiết hóa một số ví dụ và tính chất của điểm bất động chung cho ánh xạ tương thích yếu thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng và không gian kiểu-mêtric.

- Thiết lập và chứng minh định lí điểm bất động chung cho hai ánh xạ co thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng trong không gian kiểu-mêtric.

2. Nội dung chính:

- Một số khái niệm và kiến thức chuẩn bị

- Định lí điểm bất động cho hai ánh xạ thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng trong không gian kiểu-mêtric.

3. Kết quả chính đạt được (khoa học, ứng dụng, đào tạo, kinh tế - xã hôi,...):

- Hệ thống những khái niệm, tính chất cơ bản của điểm bất động chung cho ánh xạ tương thích yếu thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng và không gian kiểu-mêtric.

- Chi tiết hóa một số ví dụ và tính chất của điểm bất động chung cho ánh xạ tương thích yếu thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng và không gian kiểu-mêtric.

- Định lí điểm bất động chung cho hai ánh xạ co thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng trong không gian kiểu-mêtric.

- Một bài viết in trong Kỉ yếu Hội nghị sinh viên nghiên cứu khoa học năm 2013, Trường Đại học Đồng Tháp và một bản thảo bài báo khoa học đã gửi đăng.

Chủ nhiệm đề tài

Nguyễn Thị Ánh Nguyệt

BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

SUMMARY

Project Title: Common fixed point theorems for two maps satisfiying generalized (B)-conditions in metric-type spaces

Code number: CS2013.02.31

Coordinator: Nguyễn Thị Ánh Nguyệt

Tel.: 01648425879 E-mail: nguyennguyet10A@gmail.com

Implementing Institution: Dong Thap University

Cooperating Institution(s): No

Duration: from 2013, May to 2014, April

1. Objectives:

- to system basic notions and properties of common fixed point theorems of weakly compatible maps satisfying generalized (B)-conditions in metric-type spaces

- to prove explicitly some examples and properties of common fixed points of weakly compatible maps satisfying generalized (B)-conditions in metric-type spaces

- to state and prove common fixed point theorems and construct examples of two maps satisfying generalized (B)-conditions in metric-type spaces.

2. Main contents:

- Preliminaries

- Common fixed point theorems of two maps satisfying generalized (B)-conditions in metric-type spaces.

3. Results obtained:

- A review on basic notions and properties of common fixed point theorems of weakly compatible maps satisfying generalized (B)-conditions in metric-

type spaces

- The proofs explicitly of some examples and properties of common fixed points of weakly compatible maps satisfying generalized (B)-conditions in metric-type spaces

- Common fixed point theorems and examples of two maps satisfying generalized (B)-conditions in metric-type spaces.

- An article published in Proceeding of the 2013 Science Research Conference of Dong Thap Uiversity's students and a submitted manuscript.

Coordinator

Nguyễn Thị Ánh Nguyệt

MỞ ĐẦU

1 Tổng quan tình hình nghiên cứu

Định lí điểm bất động Banach đối với các ánh xạ co trên không gian mêtric đầy đủ là một kết quả nổi bật của toán học [4]. Sau khi được Banach chứng minh, định lí điểm bất động đối với các ánh xạ co trở thành một trong những vấn đề thu hút được rất nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Các định lí điểm bất động được nghiên cứu phong phú cho nhiều kiểu ánh xạ, trên nhiều loại không gian khác nhau.

Năm 1968, R. Kannan [14] đã chứng minh định lí điểm bất động cho ánh xạ thỏa mãn điều kiện co mà không đòi hỏi tính liên tục tại mỗi điểm. Bài báo này là cơ sở cho một số lượng lớn các bài viết về điểm bất động trong thời gian qua. Năm 1982, S. Sessa [22] đã nghiên cứu ánh xạ giao hoán yếu. Năm 1986, G. Jungck [12] đã tổng quát các khái niệm giao hoán yếu bằng cách giới thiệu ánh xạ tương thích và ánh xạ tương thích yếu vào năm 1996 [13].

Năm 2010, M. A. Khamsi đã giới thiệu một khái niệm mêtric suy rộng mới gọi là kiểu-mêtric và thiết lập được một số điểm bất động chung trong không gian này. Năm 2011, trong bài báo [1], các tác giả đã chứng minh sự tồn tại của điểm bất động chung cho hai ánh xạ tương thích yếu thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng trong không gian mêtric. Kết quả đó là sự tổng quát kết quả của M. A. Al-Thagafi, N. Shahzad [3] và G. V. R. Babu, M. L. Sandhya và M. V. R. Kameswari [6].

Ở trong nước, hướng nghiên cứu về định lí điểm bất động trên không gian mêtric suy rộng cũng được một số tác giả quan tâm nghiên cứu. Ở Trường Đại học Hồng Đức, các tác giả đã quan tâm đến định lí điểm bất động trên không gian mêtric sắp thứ tự và áp dụng [18], [19]. Ở Trường Đại học Vinh, các tác giả quan tâm đến một số dạng mở rộng cụ thể của định lí co. Năm 2012, K. P. Chi và các cộng sự đã thiết lập và chứng minh Định lí co Meir-Keeler dựa trên các lớp ánh xạ T-co [7], T. D. Thanh và các cộng sự đã chứng minh điểm bất động cho lớp ánh xạ thỏa mãn điều kiện co Ciric [15]. Ở Trường Đại học Đồng Tháp, các tác giả quan tâm đến một số dạng định lí điểm bất động trên không gian mêtric và không gian mêtric suy rộng [5]. Năm 2013, N. V. Dung đã chứng minh định lí điểm bất động chung kép cho ánh xạ đơn điệu yếu hỗn hợp trong không gian S-mêtric sắp thứ tự [8]. Gần đây, N. T. Hiếu và các cộng sự đã mở rộng kết quả của K. P. Chi trong [7], xem [10]; N. V. Dung và cộng sự đã chứng minh được định lí điểm bất động trong không gian S-mêtric [21].

2 Tính cấp thiết của đề tài

Từ tình hình nghiên cứu ở trong và ngoài nước, chúng tôi đặt vấn đề tương tự hoá những kết quả đối với không gian mêtric trong bài báo [1] cho không gian kiểu-mêtric.

Việc nghiên cứu đề tài này sẽ góp phần giải quyết vấn đề điểm bất động chung cho ánh xạ suy rộng trong không gian kiểu-mêtric. Đề tài cũng góp phần nâng cao chất lượng học tập và nghiên cứu các môn học Giải tích trong chương trình Đại học Sư phạm ngành toán.

3 Mục tiêu nghiên cứu

- Hệ thống những khái niệm, tính chất cơ bản của điểm bất động chung cho ánh xạ tương thích yếu thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng và không gian kiểu-mêtric.

- Chi tiết hóa một số ví dụ và tính chất của điểm bất động chung cho ánh xạ tương thích yếu thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng và không gian kiểu-mêtric.

- Thiết lập và chứng minh định lí điểm bất động chung cho hai ánh xạ thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng trong không gian kiểu-mêtric và xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

4 Cách tiếp cận và phương pháp nghiên cứu

Cách tiếp cận: Nghiên cứu tài liệu, bằng cách tương tự hoá những kết quả đã có đề xuất kết quả mới.

Phương pháp nghiên cứu: Nghiên cứu tài liệu, nắm vững những kết quả đã có, sau đó trình bày trước nhóm thảo luận. Cùng với sự hướng dẫn của giảng viên, sinh viên đề xuất sự tương tự hoá và chứng minh.

5 Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đề tài nghiên cứu điểm bất động chung cho hai ánh xạ co thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng trong không gian kiểu-mêtric.

6 Nội dung nghiên cứu

Đề tài nghiên cứu một số ví dụ, tính chất của điểm bất động chung cho ánh xạ tương thích yếu thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng và định lí điểm bất động chung cho hai ánh xạ co thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng trong không gian kiểu-mêtric.

Ngoài Mục lục, Mở đầu, Kết luận và kiến nghị, Tài liệu tham khảo thì nội dung chính của đề tài được trình bày trong 2 chương.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị

Chương 2: Định lý điểm bất động chung cho hai ánh xạ suy rộng trong không gian kiểu-mêtric và áp dụng.

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Ánh xạ tương thích yếu thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng trong không gian mêtric

Trong mục này, chúng tôi trình bày những kiến thức cơ bản về ánh xạ tương thích yếu thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng trong không gian mêtric.

1.1.1 Định nghĩa ([1], Definition 1.1)**.** Cho (X, d) là một không gian mêtric. Ánh xạ $T : X \longrightarrow X$ được gọi là *một ánh xạ hầu co* liên kết với ánh xạ $f : X \longrightarrow X$ nếu tồn tại hằng số $\delta \in (0, 1)$ và $L \geqslant 0$ sao cho

$$d(Tx, Ty) \leqslant \delta d(fx, fy) + Ld(fy, Tx)$$

với mọi $x, y \in X$.

1.1.2 Định nghĩa ([6])**.** Cho (X, d) là một không gian mêtric. Ánh xạ $T : X \longrightarrow X$ được gọi là thỏa mãn *điều kiện* (B) nếu tồn tại hằng số $\delta \in (0, 1)$ và $L \geqslant 0$ sao cho

$$d(Tx, Ty) \leqslant \delta d(x, y) + L \min\{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\} \quad (1.1)$$

với mọi $x, y \in X$.

1.1.3 Định nghĩa ([1], Definition 1.6)**.** Cho hai ánh xạ $f, T : X \longrightarrow X$.

(1) Điểm x được gọi là *điểm trùng* của f và T nếu $Tx = fx$.

(2) Cặp (f, T) được gọi là *tương thích yếu* nếu f và T giao hoán tại điểm trùng của chúng, nghĩa là, nếu với mọi $x \in X$, $Tx = fx$ thì $fTx = Tfx$.

(3) Giá trị y đươc gọi là *giá trị trùng* của f và T nếu tồn tại $x \in X$ sao cho $y = Tx = fx$.

(4) Điểm x được gọi là *điểm bất động chung* của f và T nếu $x = Tx = fx$.

1.1.4 Bổ đề ([2], Proposition 1.4)**.** *Giả sử $f, T : X \longrightarrow X$ có một giá trị trùng duy nhất trên X. Khi đó nếu cặp (f, T) là tương thích yếu thì f và T có điểm bất động chung duy nhất.*

1.1.5 Định nghĩa ([1], Definition 1.8)**.** Cho (X, d) là một không gian mêtric, $f, T : X \longrightarrow X$ là hai ánh xạ thỏa mãn $T(X) \subset f(X)$. Chọn $x_1 \in X$ sao cho $fx_1 = Tx_0$. Điều này được thực hiện từ $T(X) \subset f(X)$. Tiếp tục quá trình này, ta chọn $x_{k+1} \in X$ sao cho

$$fx_{k+1} = Tx_k, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Dãy $\{fx_n\}$ được gọi là *T-dãy* với điểm bắt đầu là x_0.

1.1.6 Định nghĩa ([1], Definition 1.9)**.** Cho (X, d) là một không gian mêtric. Ánh xạ $T : X \longrightarrow X$ được gọi là thỏa mãn *điều kiện (B) suy rộng* liên kết với $f : X \longrightarrow X$ nếu tồn tại hằng số $\delta \in (0, 1)$ và $L \geqslant 0$ sao cho

$$d(Tx, Ty) \leqslant \delta M(x, y) + L \min \{d(fx, Tx), d(fy, Ty), d(fx, Ty), d(fy, Tx)\} \tag{1.2}$$

với mọi $x, y \in X$, trong đó
$M(x, y) = \max \left\{ d(fx, fy), d(fx, Tx), d(fy, Ty), \dfrac{d(fx, Ty) + d(fy, Tx)}{2} \right\}$.

1.1.7 Ví dụ ([1], Example 1.10)**.** Cho $X = \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$ với mêtric thông thường và $T : X \longrightarrow X$ với $Tx = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, \text{ nếu } x \in \{0, 1\}, \\ 0, \text{ nếu } x = 1. \end{cases}$

Khi đó T thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng.

Chứng minh. Trường hợp 1: $x = 0, y = \frac{1}{2}$. Ta có

$$d(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \leqslant \delta \max \left\{ d(0, \frac{1}{2}), d(0, \frac{1}{2}), d(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{d(0, \frac{1}{2}) + d(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{2} \right\}$$

$$+ L \min \left\{ d(0, \frac{1}{2}), d(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), d(0, \frac{1}{2}), d(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \right\}$$

hay $0 \leqslant \delta\frac{1}{2}$. Khi đó bất đẳng thức (1.2) đúng với mọi $\delta \in (0, 1)$.

Trường hợp 2: $x = 0, y = 1$. Ta có

$$d(\frac{1}{2}, 0) \leqslant \delta \max \left\{ d(0, 1), d(0, \frac{1}{2}), d(1, 0), \frac{d(0, 0) + d(1, \frac{1}{2})}{2} \right\}$$

$$+ L \min \left\{ d(0, \frac{1}{2}), d(1, 0), d(0, 0), d(1, \frac{1}{2}) \right\}$$

hay $\frac{1}{2} \leqslant \delta$. Khi đó bất đẳng thức (1.2) đúng với mọi $\delta \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Trường hợp 3: $x = \frac{1}{2}, y = 1$. Ta có

$$d(\frac{1}{2}, 0) \leqslant \delta \max \left\{ d(\frac{1}{2}, 1), d(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), d(1, 0), \frac{d(\frac{1}{2}, 0) + d(1, \frac{1}{2})}{2} \right\}$$

$$+ L \min \left\{ d(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), d(1, 0), d(\frac{1}{2}, 0), d(1, \frac{1}{2}) \right\}$$

hay $\frac{1}{2} \leqslant \delta$. Khi đó bất đẳng thức (1.2) đúng với mọi $\delta \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Trường hợp 4: $x = \frac{1}{2}, y = 0$. Ta có

$$d(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \leqslant \delta \max \left\{ d(\frac{1}{2}, 0), d(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), d(0, \frac{1}{2}), \frac{d(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + d(0, \frac{1}{2})}{2} \right\}$$

$$+L\min\left\{d(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),d(0,\frac{1}{2}),d(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),d(0,\frac{1}{2})\right\}$$

hay $0\leqslant \delta\frac{1}{2}$. Khi đó bất đẳng thức (1.2) đúng với mọi $\delta\in(0,1)$.

Trường hợp 5: $x=1,y=0$. Ta có

$$d(0,\frac{1}{2})\leq \delta\max\left\{d(1,0),d(1,\frac{1}{2}),d(0,\frac{1}{2}),\frac{d(1,\frac{1}{2})+d(0,0}{2}\right\}$$

$$+L\min\left\{d(1,0),d(0,\frac{1}{2}),d(1,\frac{1}{2}),d(0,0)\right\}$$

hay $\frac{1}{2}\leq\delta$. Khi đó bất đẳng thức (1.2) đúng với mọi $\delta\in[\frac{1}{2},1)$.

Trường hợp 6: $x=1,y=\frac{1}{2}$. Ta có

$$d(0,\frac{1}{2})\leq \delta\max\left\{d(1,\frac{1}{2}),d(1,0),d(\frac{1}{2}),\frac{1}{2}),\frac{d(1,\frac{1}{2})+d(\frac{1}{2},0)}{2}\right\}$$

$$+L\min\left\{d(1,0),d(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),d(1,\frac{1}{2}),d(\frac{1}{2},0)\right\}$$

hay $\frac{1}{2}\leq\delta$. Khi đó bất đẳng thức (1.2) đúng với mọi $\delta\in[\frac{1}{2},1)$.

Mặt khác, T không thỏa mãn điều kiện (B). Thật vậy, với $x=\frac{1}{2},y=1$, ta có

$$d(\frac{1}{2},0)\leq \delta d(\frac{1}{2},1)+L\min\left\{d(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),d(1,0),d(\frac{1}{2},0),d(1,\frac{1}{2})\right\}$$

hay $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}\delta$. Do đó không tồn tại $\delta\in(0,1)$ thỏa bất đẳng thức (1.1). □

1.2 Không gian kiểu-mêtric

Trong mục này, chúng tôi trình bày những kiến thức cơ bản về không gian kiểu-mêtric được sử dụng trong đề tài.

1.2.1 Định nghĩa ([16], Definition 2.7)**.** Cho X là một tập khác rỗng, $K \geq 1$ là một số thực và $D : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ là một hàm thỏa mãn các điều kiện sau

(1) $D(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$.

(2) $D(x, y) = D(y, x)$ với mọi $x, y \in X$.

(3) $D(x, z) \leq K\,[D(x, y_1) + \ldots + D(y_n, z)]$ với mọi $x, y_1, \ldots, y_n, z \in X$.

Khi đó, D được gọi là một *kiểu-mêtric* trên X và (X, D, K) được gọi là một không gian *kiểu-mêtric*.

1.2.2 Nhận xét. (1) (X, d) là một không gian mêtric khi và chỉ khi $(X, d, 1)$ là một không gian kiểu-mêtric.

(2) Trong [17] các tác giả đã xét một không gian kiểu-mêtric khác, trong đó điều kiện (3) của Định nghĩa 1.2.1 được thay bởi điều kiện sau

$$D(x, z) \leq K\,[D(x, y) + D(y, z)] \tag{1.3}$$

với mọi $x, y, z \in X$.

1.2.3 Định nghĩa ([16], Definition 2.8)**.** Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric và $\{x_n\}$ là một dãy trong X. Khi đó

(1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* đến x, kí hiệu là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, x) = 0$. Khi đó x được gọi là *điểm giới hạn* của dãy $\{x_n\}$.

(2) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là một *dãy Cauchy* nếu $\lim\limits_{m,n\to\infty} D(x_m, x_n) = 0$.

(3) Không gian (X, D, K) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy trong X là một dãy hội tụ.

1.2.4 Ví dụ. Cho $X = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, K = \frac{3}{2}$ và

$$D(0,0) = D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = D(1,1) = 0$$

$$D(0, \frac{1}{2}) = D(\frac{1}{2}, 0) = D(\frac{1}{2}, 1) = D(1, \frac{1}{2}) = 1, D(0,1) = D(1,0) = 3.$$

Khi đó (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric nhưng $(X, D, 1)$ không phải là một không gian mêtric.

Chứng minh. Thật vậy, điều kiện (1) và (2) trong Định nghĩa 1.2.1 là hiển nhiên. Ta kiểm tra điều kiện (3) trong Định nghĩa 1.2.1.

Trường hợp 1: $x = 0, y = \frac{1}{2}$. Ta có thể giả thiết $y_1 = \ldots = y_n = 1$. Khi đó

$$D(0, \frac{1}{2}) = 1 \leq \frac{3}{2}(3 + 1) = \left(D(0, 1) + D(1, \frac{1}{2}) \right)$$

Trường hợp 2: $x = 0, y = 1$. Ta có thể giả thiết $y_1 = \ldots = y_n = \frac{1}{2}$. Khi đó

$$D(0, 1) = 3 \leq \frac{3}{2}(1 + 1) = K \left(D(0, \frac{1}{2}) + D(\frac{1}{2}, 1) \right)$$

Trường hợp 3: $x = 1, y = \frac{1}{2}$. Ta có thể giả thiết $y_1 = \ldots = y_n = 0$. Khi đó

$$D(1, \frac{1}{2}) = 1 \leq \frac{3}{2}(3 + 1) = K \left(D(1, 0) + D(0, \frac{1}{2}) \right)$$

Vậy (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric.

Ta có $D(0, 1) = 3 \leq (1 + 1) = D(0, \frac{1}{2}) + D(\frac{1}{2}, 1)$. Điều này là vô lí nên $(X, D, 1)$ không phải là một không gian mêtric. □

Trong tài liệu [11], các tác giả đã chứng tỏ rằng kiểu-mêtric D trong Định nghĩa 1.2.1 là một ánh xạ không liên tục.

1.2.5 Nhận xét. Trong không gian kiểu-mêtric, tôpô được hiểu là tôpô cảm sinh bởi sự hội tụ của nó. Điều này có nghĩa là tập U mở trong không gian kiểu-mêtric khi và chỉ khi với mỗi $x \in U$, $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$ thì tồn tại n_0 sao cho $x_n \in U$ với mọi $n \geq n_0$. Khi đó, kiểu-mêtric $D : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ là liên tục tại (x, y) nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{n \to \infty} D(x_n, y_n) = D(x, y)$ với mọi dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ mà $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} y_n = y$.

CHƯƠNG 2

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CHO HAI ÁNH XẠ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN (B) SUY RỘNG TRONG KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC VÀ ÁP DỤNG

2.1 Định lí điểm bất động chung cho hai ánh xạ thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng trong không gian kiểu-mêtric

Trong mục này chúng tôi mở rộng những kết quả về định lí điểm bất động cho hai ánh xạ thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng trong không gian mêtric ở tài liệu [1] sang không gian kiểu-mêtric. Kết quả là chúng tôi đã thiết lập và chứng minh được hai định lí: Định lí 2.1.6, Định lí 2.1.8 và hai hệ quả: Hệ quả 2.1.7, Hệ quả 2.1.9.

Tương tự Định nghĩa 1.1.2, Định nghĩa 1.1.5, Định nghĩa 1.1.6, chúng tôi giới thiệu những khái niệm sau.

2.1.1 Định nghĩa. Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric. Ánh xạ $T : X \longrightarrow X$ được gọi là thỏa mãn *điều kiện* (B) nếu tồn tại hằng số $\delta \in (0, \dfrac{1}{K})$ và $L \geqslant 0$ sao cho

$$D(Tx, Ty) \leqslant \delta D(x, y) + L \min\{D(x, Tx), D(y, Ty), D(x, Ty), D(y, Tx)\} \tag{2.1}$$

với mọi $x, y \in X$.

2.1.2 Định nghĩa. Cho (X, D, K) là một không kiểu-gian mêtric và hai ánh xạ $f, T : X \longrightarrow X$ thỏa mãn $T(X) \subset f(X)$ và $x_0 \in X$. Chọn $x_1 \in X$ sao cho $fx_1 = Tx_0$. Tiếp tục quá trình này, ta chọn $x_{k+1} \in X$ sao cho

$$fx_{k+1} = Tx_k, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Khi đó dãy $\{fx_n\}$ được gọi là một T-*dãy* với điểm bắt đầu x_0.

2.1.3 Định nghĩa. Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric. Ánh xạ $T : X \longrightarrow X$ được gọi là thỏa mãn *điều kiện* (B) *suy rộng* liên kết với $f : X \longrightarrow X$ nếu tồn tại hằng số $\delta \in (0, \frac{1}{K})$ và $L \geqslant 0$ sao cho

$$D(Tx, Ty) \leqslant \delta M(x, y) + L \min\{D(fx, Tx), D(fy, Ty), D(fx, Ty), D(fy, Tx)\} \tag{2.2}$$

với mọi $x, y \in X$, trong đó
$M(x, y) = \max\left\{D(fx, fy), D(fx, Tx), D(fy, Ty), \dfrac{D(fx, Ty) + D(fy, Tx)}{2}\right\}$.

2.1.4 Nhận xét. Ánh xạ T thỏa mãn điều kiện (B) là một ánh xạ thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng với ánh xạ liên kết f là ánh xạ đồng nhất.

2.1.5 Ví dụ. Cho $X = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ và

$$D(0, 0) = D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = D(1, 1) = 0,$$

$$D(0, \frac{1}{2}) = D(\frac{1}{2}, 0) = D(\frac{1}{2}, 1) = D(1, \frac{1}{2}) = 1, D(0, 1) = D(1, 0) = 3.$$

Khi đó, D là một kiểu-mêtric trên X với $K = \frac{3}{2}$.

Đặt $T : X \longrightarrow X$ với $Tx = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ nếu } x \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \\ 0 \text{ nếu } x = 1. \end{cases}$

Ánh xạ T thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng nhưng không thỏa mãn điều kiện (B).

Chứng minh. Trường hợp 1: $x = 0, y = \frac{1}{2}$. Ta có

$$D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \leqslant \delta \max\left\{D(0, \frac{1}{2}), D(0, \frac{1}{2}), D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{D(0, \frac{1}{2}) + D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{2}\right\}$$

$$+L \min\left\{D(0, \frac{1}{2}), D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), D(0, \frac{1}{2}), D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right\}$$

hay $0 \leqslant \delta$. Khi đó bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi $\delta \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$.

Trường hợp 2: $x = 0, y = 1$. Ta có

$$D(\frac{1}{2}, 0) \leqslant \delta \max\left\{D(0, 1), D(0, \frac{1}{2}), D(1, 0), \frac{D(0, 0) + D(1, \frac{1}{2})}{2}\right\}$$

$$+L \min\left\{D(0, \frac{1}{2}), D(1, 0), D(0, 0), D(1, \frac{1}{2})\right\}$$

hay $1 \leqslant 3\delta$. Khi đó bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi $\delta \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Trường hợp 3: $x = \frac{1}{2}, y = 1$. Ta có

$$D(\frac{1}{2}, 0) \leqslant \delta \max\left\{D(\frac{1}{2}, 1), D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), D(1, 0), \frac{D(\frac{1}{2}, 0) + D(1, \frac{1}{2})}{2}\right\}$$

$$+L \min\left\{D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), D(1, 0), D(\frac{1}{2}, 0), D(1, \frac{1}{2})\right\}$$

hay $1 \leqslant 3\delta$. Khi đó bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi $\delta \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Trường hợp 4: $x = \frac{1}{2}, y = 0$. Ta có

$$D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \leqslant \delta \max\left\{D(\frac{1}{2}, 0), D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), D(0, \frac{1}{2}), \frac{D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + D(0, \frac{1}{2})}{2}\right\}$$

$$+L\min\left\{D(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),D(0,\frac{1}{2}),D(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),D(0,\frac{1}{2})\right\}$$

hay $0\leqslant\delta$. Khi đó bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi $\delta\in\left(0,\frac{2}{3}\right)$.

Trường hợp 5: $x=1,y=0$. Ta có

$$D(0,\frac{1}{2})\leq\delta\max\left\{D(1,0),D(1,\frac{1}{2}),D(0,\frac{1}{2}),\frac{D(1,\frac{1}{2})+D(0,0}{2}\right\}$$

$$+L\min\left\{D(1,0),D(0,\frac{1}{2}),D(1,\frac{1}{2}),D(0,0)\right\}$$

hay $1\leq3\delta$. Khi đó bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi $\delta\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Trường hợp 6: $x=1,y=\frac{1}{2}$. Ta có

$$D(0,\frac{1}{2})\leq\delta\max\left\{D(1,\frac{1}{2}),D(1,0),D(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\frac{D(1,\frac{1}{2})+D(\frac{1}{2},0)}{2}\right\}$$

$$+L\min\left\{D(1,0),D(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),D(1,\frac{1}{2}),D(\frac{1}{2},0)\right\}$$

hay $1\leq3\delta$. Khi đó bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi $\delta\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Vậy T thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng với $\delta\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ và $L\geq0$.

Mặt khác, T không thỏa mãn điều kiện (B). Thật vậy, với $x=\frac{1}{2},y=1$ thì ta có

$$D(\frac{1}{2},0)=1\leq\delta=\delta D(\frac{1}{2},1)+L\min\left\{D(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),D(1,0),D(\frac{1}{2},0),D(1,\frac{1}{2})\right\}$$

Do đó không tồn tại $\delta\in(0,1)$ để bất đẳng thức (2.1) xảy ra. □

2.1.6 Định lí. *Cho (X,D,K) là một không gian kiểu-mêtric và hai ánh xạ $f,T:X\longrightarrow X$ thỏa mãn*

(1) D là một hàm liên tục.

(2) $T(X) \subset f(X)$.

(3) T thoả mãn điều kiện (B) suy rộng liên kết với ánh xạ f.

(4) $f(X)$ hoặc $T(X)$ là một không gian con đầy đủ của X.

Khi đó f và T tồn tại một điểm trùng và giá trị trùng là duy nhất.

Chứng minh. Lấy $x_0 \in X$ bất kì và $\{fx_n\}$ là một T-dãy với điểm bắt đầu x_0. Ta có

$$\begin{aligned}D(Tx_n, Tx_{n-1}) &\le \delta M(x_n, x_{n-1}) + L\min\big\{D(fx_n, Tx_n), D(fx_{n-1}, Tx_{n-1}),\\ &\qquad\qquad D(fx_n, Tx_{n-1}), D(fx_{n-1}, Tx_n)\big\}\\ &\le \delta M(x_n, x_{n-1}) + L\min\big\{D(fx_n, fx_{n+1}), D(fx_{n-1}, fx_n),\\ &\qquad\qquad D(fx_n, fx_n), D(fx_{n-1}, fx_{n+1})\big\}\end{aligned}$$

hay

$$D(fx_n, fx_{n+1}) \le \delta M(x_n, x_{n-1}) \tag{2.3}$$

trong đó

$$\begin{aligned}M(x_n, x_{n-1}) &= \max\Big\{D(fx_n, fx_{n-1}), D(fx_n, Tx_n), D(fx_{n-1}, Tx_{n-1}),\\ &\qquad \frac{D(fx_n, Tx_{n-1}) + D(fx_{n-1}, fx_{n+1})}{2}\Big\}\\ &= \max\Big\{D(fx_n, fx_{n-1}), D(fx_n, fx_{n+1}), D(fx_{n-1}, fx_n),\\ &\qquad \frac{D(fx_n, fx_n) + D(fx_{n-1}, fx_{n+1})}{2}\Big\}\\ &= \max\Big\{D(fx_n, fx_{n-1}), D(fx_n, fx_{n+1}), \frac{D(fx_{n-1}, fx_{n+1})}{2}\Big\}.\end{aligned}$$

Trường hợp 1: Tồn tại n sao cho $M(x_n, x_{n-1}) = D(fx_n, fx_{n-1})$. Từ (2.3) ta có

$$D(fx_n, fx_{n+1}) \le \delta D(fx_n, fx_{n-1}). \tag{2.4}$$

Trường hợp 2: Tồn tại n sao cho $M(x_n, x_{n-1}) = D(fx_n, fx_{n+1})$. Từ (2.3) ta có

$$D(fx_n, fx_{n+1}) \le \delta D(fx_n, fx_{n+1})$$

Vì $\delta \in (0, \dfrac{1}{K})$ nên $D(fx_n, fx_{n+1}) = 0$. Suy ra

$$D(fx_n, fx_{n+1}) \leq \delta D(fx_n, fx_{n-1}). \tag{2.5}$$

Trường hợp 3: Với mọi n ta có $M(x_n, x_{n-1}) = \dfrac{D(fx_{n-1}, fx_{n+1})}{2}$.
Từ (2.3) ta có

$$\begin{aligned} D(fx_n, fx_{n+1}) &\leq \frac{\delta D(fx_{n-1}, fx_{n+1})}{2} \\ &\leq \frac{\delta K\left[D(fx_{n-1}, fx_n) + D(fx_n, fx_{n+1})\right]}{2}. \end{aligned}$$

Vậy

$$D(fx_n, fx_{n+1}) \leq \frac{\delta K}{2-\delta K} D(fx_{n-1}, fx_n) \leq \delta K D(fx_{n-1}, fx_n) \tag{2.6}$$

Từ (2.4), (2.5), (2.6) ta thu được

$$D(fx_n, fx_{n+1}) \leq \delta K D(fx_{n-1}, fx_n) \leq \ldots \leq (\delta K)^n D(fx_0, fx_1).$$

Với $m \geq n$, ta có

$$\begin{aligned} D(fx_m, fx_n) &\leq K\left[D(fx_n, fx_{n+1}) + D(fx_{n+1}, fx_{n+2}) + \ldots + D(fx_{m-1}, fx_m)\right] \\ &\leq K\left[(\delta K)^n + (\delta K)^{n+1} + \ldots + (\delta K)^{m-1}\right] D(fx_0, fx_1) \\ &\leq K \frac{(\delta K)^n}{1-\delta K} D(fx_0, fx_1). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{m,n\to\infty} D(fx_m, fx_n) = 0$. Vậy dãy $\{fx_n\}$ là một dãy Cauchy.

Nếu $f(X)$ là một không gian con đầy đủ của X thì tồn tại $p \in f(X)$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} fx_n = p$. Khi đó tồn tại $u^* \in X$ sao cho $fu^* = p$. Ta có

$$\begin{aligned} &D(p, Tu^*) \\ &\leq K\left[D(p, fx_{n+1}) + D(fx_{n+1}, Tu^*)\right] \\ &= KD(p, fx_{n+1}) + KD(Tx_n, Tu^*) \\ &\leq KD(p, fx_{n+1}) \\ &\quad + \delta K \max\left\{D(fx_n, fu^*), D(fx_n, Tx_n), D(fu^*, Tu^*), \frac{D(fx_n, Tu^*) + D(fu^*, Tx_n)}{2}\right\} \\ &\quad + LK \min\left\{D(fx_n, fx_{n+1}), D(fu^*, Tu^*), D(fx_n, Tu^*), D(fu^*, Tx_n)\right\}. \end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$, sử dụng tính liên tục của D ta có

$$
\begin{aligned}
D(p,Tu^*) \leq K0 + \delta K \max &\left\{0, 0, D(p,Tu^*), \frac{D(p,Tu^*)+0}{2}\right\} \\
&+ L\min\{0, D(p,Tu^*), D(p,Tu^*), 0\}.
\end{aligned}
$$

Từ đó suy ra $D(p,Tu^*) \leq \delta K D(p,Tu^*)$. Vì $\delta K \in (0,1)$ nên $D(p,Tu^*) = 0$ hay $fu^* = p = Tu^*$.

Nếu $T(X)$ là một không gian con đầy đủ thì tồn tại $q \in T(X)$ sao cho $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} Tx_n = q$. Vì $T(X) \subset f(X)$ nên $q \in f(X)$ và $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} fx_n = q$. Chứng minh tương tự như trên ta có $u^* \in X$ sao cho $fu^* = q = Tu^*$.

Tiếp theo ta chứng minh tính duy nhất của giá trị trùng. Giả sử rằng tồn tại p, p^* sao cho $p = Tu = fu$ và $p^* = Tu^* = fu^*$. Khi đó

$$
\begin{aligned}
&D(p,p^*) \\
&= D(Tu,Tu^*) \\
&\leq \delta\max\left\{D(fu,fu^*), D(fu,Tu), D(fu^*,Tu^*), \frac{D(fu,Tu^*)+D(fu^*,Tu)}{2}\right\} \\
&\quad + L\min\{D(fu,Tu), D(fu^*,Tu^*), D(fu,Tu^*), D(fu^*,Tu)\} \\
&= \delta\max\left\{D(p,p^*), D(p,p), D(p^*,p^*), \frac{D(p,p^*)+D(p^*,p)}{2}\right\} \\
&\quad + L\min\{D(p,p), D(p^*,p^*), D(p,p^*), D(p^*,p)\} \\
&= \delta D(p,p^*).
\end{aligned}
$$

Suy ra $D(p,p^*) \leq D(p,p^*)$. Vì $\delta \in (0, \frac{1}{K})$ nên $D(p,p^*) = 0$ hay $p = p^*$. □

2.1.7 Hệ quả. *Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ, D là một hàm liên tục và $T : X \longrightarrow X$ thoả mãn điều kiện (B). Khi đó T có điểm bất động duy nhất.*

Chứng minh. Áp dụng Định lí 2.1.6 với f là ánh xạ đồng nhất ta có điều phải chứng minh. □

2.1.8 Định lí. *Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric và hai ánh xạ $f, T : X \longrightarrow X$ thỏa mãn*

(1) D là một hàm liên tục.

(2) T thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng liên kết với ánh xạ f.

(3) $f(X)$ hoặc $T(X)$ là một không gian con đầy đủ của X.

(4) $T(X) \subset f(X)$.

(5) Cặp (f, T) tương thích yếu.

Khi đó f và T có điểm bất động chung duy nhất trên X.

Chứng minh. Từ Định lí 2.1.6 ta có f và T có giá trị trùng duy nhất và (f, T) tương thích yếu. Khi đó, theo Bổ đề 1.1.4 ta suy ra được điều phải chứng minh. □

2.1.9 Hệ quả. *Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric và hai ánh xạ $f, T : X \longrightarrow X$ thỏa mãn $T(X) \subset f(X)$, tồn tại $\delta \in (0, \frac{1}{K})$ và $L \geq 0$ sao cho*

$$D(Tx, Ty) \leq \delta m(x, y) + L \min\big\{D(f(x), T), D(fy, Ty), D(fx, Ty), D(fy, Ty), D(fy, Tx)\big\} \quad (2.7)$$

với mọi $x, y \in X$, trong đó

$$m(x, y) = \max\left\{D(fx, fy), \frac{D(fx, Tx) + D(fy, Ty)}{2}, \frac{D(fy, Tx) + D(fx, Ty)}{2}\right\}.$$

Nếu $f(X)$ hoặc $T(X)$ là một không gian con đầy đủ của X thì cặp (f, T) có một giá trị trùng. Hơn nữa, nếu cặp (f, T) tương thích yếu thì f và T có điểm bất động chung duy nhất.

Chứng minh. Bất đẳng thức (2.7) là dạng đặc biệt của bất đẳng thức (2.2) nên kết quả được suy trực tiếp từ Định lí 2.1.8. □

2.2 Ví dụ minh họa và một số hệ quả

Từ Định lí 2.1.6, Hệ quả 2.1.7, Đinh lí 2.1.8, Hệ quả 2.1.9 và Nhận xét 1.2.2 ta chứng minh được một số định lí và hệ quả sau.

2.2.1 Định lí ([1], Theorem 2.1)**.** *Cho (X, d) là một không gian mêtric và $f, T : X \longrightarrow X$ thỏa mãn*

(1) $T(X) \subset f(X)$.

(2) T *thoả mãn điều kiện* (B) *suy rộng liên kết với ánh xạ* f.

(3) $T(X)$ *hoặc* $f(X)$ *là một không gian con đầy đủ của* X.

Khi đó f *và* T *có giá trị trùng duy nhất.*

Chứng minh. Thay $K = 1$ ở Định lí 2.1.6, ta suy ra được điều phải chứng minh. $\square$

2.2.2 Định lí ([1],Theorem 2.2)**.** *Cho* (X, d) *là một không gian mêtric và hai ánh xạ* $f, T : X \longrightarrow X$ *thỏa mãn các điều kiện sau*

(1) T *thỏa mãn điều kiện* (B) *suy rộng liên kết với ánh xạ* f.

(2) $f(X)$ *hoặc* $T(X)$ *là một không gian con đầy đủ của* X.

(3) $T(X) \subset f(X)$.

(4) Cặp (f, T) *tương thích yếu.*

Khi đó f *và* T *có điểm bất động chung duy nhất trên* X.

Chứng minh. Thay $K = 1$ ở Định lí 2.1.8, ta suy ra được điều phải chứng minh. $\square$

2.2.3 Hệ quả ([1], Corollary 2.3)**.** *Cho* (X, d) *là một không gian mêtric và hai ánh xạ* $f, T : X \longrightarrow X$ *thỏa mãn* $T(X) \subset f(X)$, *tồn tại* $\delta \in (0, 1)$ *và* $L \geq 0$ *sao cho* $d(Tx, Ty)$

$$\leq \delta m(x, y) + L \min\left\{d(f(x), T), d(fy, Ty), d(fx, Ty), d(fy, Ty), d(fy, Tx)\right\} \tag{2.8}$$

với mọi $x, y \in X$, *trong đó*

$$m(x, y) = \max\left\{d(fx, fy), \frac{d(fx, Tx) + d(fy, Ty)}{2}, \frac{d(fy, Tx) + d(fx, Ty)}{2}\right\}.$$

Nếu $f(X)$ hoặc $T(X)$ là một không gian con đầy đủ của X thì cặp (f,T) có một giá trị trùng. Hơn nữa, nếu cặp (f,T) tương thích yếu thì f và T có một điểm bất động chung duy nhất.

Chứng minh. Thay $K = 1$ ở Hệ quả 2.1.9, ta suy ra được điều phải chứng minh. $\square$

2.2.4 Ví dụ. Cho $X = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ và

$$D(0,0) = D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = D(1,1) = D(2,2) = 0,$$

$$D\left(0, \frac{1}{2}\right) = D\left(\frac{1}{2}, 0\right) = D\left(\frac{1}{2}, 2\right) = D\left(2, \frac{1}{2}\right) = D(1,2) = D(2,1) = 1,$$

$$D\left(1, \frac{1}{2}\right) = D\left(\frac{1}{2}, 1\right) = D(0,1) = D(1,0) = D(0,2) = D(2,0) = 3.$$

Khi đó, (X,D) là một không gian kiểu-mêtric với $K = \frac{3}{2}$.

Đặt $T : X \longrightarrow X$ với $Tx = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ nếu } x \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \\ 0 \text{ nếu } x = \{1,2\} \end{cases}$

$$f : X \longrightarrow X \text{ với } fx = \begin{cases} 0, x = 0 \\ \frac{1}{2}, x = \frac{1}{2} \\ 2, x = 1 \\ 1, x = 2. \end{cases}$$

Khi đó $T(X) \subset f(X)$ và cặp (f,T) là tương thích yếu trên X và T thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng với $\delta \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ và $L \geq 0$.

Mặt khác, (f,T) thỏa mãn giả thiết của Định lí 2.1.8 nên f và T có điểm bất động chung duy nhất.

Chứng minh. Ta có $x = \frac{1}{2}, fx = Tx = \frac{1}{2}$ thì $Tfx = \frac{1}{2} = fTx$. Vậy $T(X) \subset f(X)$ và cặp (f,T) là tương thích yếu.

Bây giờ ta chứng minh T thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng với $\delta = \frac{1}{3}$ và $L = 0$.

Trường hợp 1: $x = 0, y = \frac{1}{2}$. Ta có

$$D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \le \delta \max \left\{ D(0, \frac{1}{2}), D(0, \frac{1}{2}), D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{D(0,0) + D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{2} \right\}$$

$$+ L \min \left\{ D(0, \frac{1}{2}), D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), D(0,0), D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \right\}$$

hay $0 \le \delta$. Khi đó bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi $\delta \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$.

Trường hợp 2: $x = 0, y = 1$. Ta có

$$D(\frac{1}{2}, 0) \le \delta \max \left\{ D(0, 2), D(0, \frac{1}{2}), D(2, 0), \frac{D(0,0) + D(2, \frac{1}{2})}{2} \right\}$$

$$+ L \min \left\{ D(0, \frac{1}{2}), D(2, 0), D(0,0), D(2, \frac{1}{2}) \right\}$$

hay $1 \le 3\delta$. Khi đó bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi $\delta \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Trường hợp 3: $x = 0, y = 2$. Ta có

$$D(\frac{1}{2}, 0) \le \delta \max \left\{ D(0, 1), D(0, \frac{1}{2}), D(1, 0), \frac{D(0,0) + D(1, \frac{1}{2})}{2} \right\}$$

$$+ L \min \left\{ D(0, \frac{1}{2}), D(1, 0), D(0,0), D(1, \frac{1}{2}) \right\}$$

hay $1 \le 3\delta$. Khi đó bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi $\delta \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Trường hợp 4: $x = \frac{1}{2}, y = 0$. Ta có

$$D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \le \delta \max \left\{ D(\frac{1}{2}, 0), D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), D(0, \frac{1}{2}), \frac{D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + D(0, \frac{1}{2})}{2} \right\}$$

$$+ L \min \left\{ D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), D(0, \frac{1}{2}), D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), D(0, \frac{1}{2}) \right\}$$

hay $0 \leq \delta$. Khi đó bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi $\delta \in \left(0, \dfrac{2}{3}\right)$.

Trường hợp 5: $x = \dfrac{1}{2}, y = 1$. Ta có

$$D(\frac{1}{2}, 0) \leq \delta \max\left\{D(\frac{1}{2}, 2), D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), D(2, 0), \frac{D(\frac{1}{2}, 0) + D(2, \frac{1}{2})}{2}\right\}$$

$$+L \min\left\{D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), D(2, 0), D(\frac{1}{2}, 0), D(2, \frac{1}{2})\right\}$$

hay $1 \leq 3\delta$. Khi đó bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi $\delta \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Trường hợp 6: $x = \dfrac{1}{2}, y = 2$. Ta có

$$D(\frac{1}{2}, 0) \leq \delta \max\left\{D(\frac{1}{2}, 1), D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), D(1, 0), \frac{D(\frac{1}{2}, 0) + D(\frac{1}{2}, 1)}{2}\right\}$$

$$+L \min\left\{D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), D(1, 0), D(\frac{1}{2}, 0), D(\frac{1}{2}, 1)\right\}$$

hay $1 \leq 3\delta$. Khi đó bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi $\delta \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Trường hợp 7: $x = 1, y = 0$. Ta có

$$D(0, \frac{1}{2}) \leq \delta \max\left\{D(2, 0), D(2, 0), D(0, \frac{1}{2}), \frac{D(2, \frac{1}{2}) + D(0, 0)}{2}\right\}$$

$$+L \min\left\{D(2, 0), D(0, \frac{1}{2}), D(2, \frac{1}{2}), D(0, 0)\right\}$$

hay $1 \leq 3\delta$. Khi đó bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi $\delta \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Trường hợp 8: $x = 1, y = \dfrac{1}{2}$. Ta có

$$D(0, \frac{1}{2}) \leq \delta \max\left\{D(2, \frac{1}{2}), D(2, 0), D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{D(2, \frac{1}{2}) + D(\frac{1}{2}, 0)}{2}\right\}$$

$$+L\min\left\{D(2,0), D(\frac{1}{2},\frac{1}{2}), D(2,\frac{1}{2})+D(\frac{1}{2},0)\right\}$$

hay $1 \le 3\delta$. Khi đó bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi $\delta \in [\frac{1}{3},\frac{2}{3})$.

Trường hợp 9: $x = 1, y = 2$. Ta có

$$D(0,0) \le \delta\max\left\{D(2,1), D(2,0), D(1,0), \frac{D(2,0)+D(1,0)}{2}\right\}$$

$$+L\min\{D(2,0), D(1,0), D(2,0), D(1,0)\}$$

hay $0 \le 3\delta$. Khi đó bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi $\delta \in \left(0,\frac{2}{3}\right)$.

Trường hợp 10: $x = 2, y = 0$. Ta có

$$D(0,\frac{1}{2}) \le \delta\max\left\{D(1,0), D(1,0), D(0,\frac{1}{2}), \frac{D(1,\frac{1}{2})+D(0,0)}{2}\right\}$$

$$+L\min\left\{D(1,0), D(0,\frac{1}{2}), D(1,\frac{1}{2}), D(0,0)\right\}$$

hay $1 \le 3\delta$. Khi đó bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi $\delta \in [\frac{1}{3},\frac{2}{3})$.

Trường hợp 11: $x = 2, y = \frac{1}{2}$. Ta có

$$D(0,\frac{1}{2}) \le \delta\max\left\{D(0,\frac{1}{2}), D(1,0), D(\frac{1}{2},\frac{1}{2}), \frac{D(1,\frac{1}{2})+D(\frac{1}{2},0)}{2}\right\}$$

$$+L\min\left\{D(1,0), D(\frac{1}{2},\frac{1}{2}), D(1,\frac{1}{2}), D(\frac{1}{2},0)\right\}$$

hay $1 \le 3\delta$. Khi đó bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi $\delta \in [\frac{1}{3},\frac{2}{3})$.

Trường hợp 12: $x = 2, y = 1$. Ta có

$$D(0,0) \le \delta\max\left\{D(1,2), D(1,0), D(2,0), \frac{D(1,0)+D(2,0)}{2}\right\}$$

$$+L\min\{D(1,0),D(2,0),D(1,0),D(2,0)\}$$

hay $0 \le 3\delta$. Khi đó bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi $\delta \in \left(0, \dfrac{2}{3}\right)$.
Vậy T thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng trong và cặp(f,T) thỏa mãn giả thiết của Định lí 2.1.8 nên f và T có điểm bất động chung duy nhất.

Mặt khác, vì $D(0,2) = 3 \ge 1 + 1 = D(0, \dfrac{1}{2}) + D(\dfrac{1}{2}, 2)$ nên D không phải là một mêtric trên X. Do đó Định lí 2.2.2 không được áp dụng cho f và T trên $(X, D, 1)$. $\square$

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1 Kết luận

Đề tài đã đạt được những kết quả sau.
- Chi tiết hoá ví dụ về ánh xạ thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng mà không thỏa mãn điều kiện (B) trong không gian mêtric: Ví dụ 1.1.7
- Giới thiệu khái niệm điều kiện (B), T-dãy, điều kiện (B) suy rộng trong không gian kiểu-mêtric: Định nghĩa 2.1.1, Định nghĩa 2.1.2, Định nghĩa 2.1.3.
- Thiết lập và chứng minh được định lí điểm bất động chung cho hai ánh xạ thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng trong không gian kiểu-mêtric: Định lí 2.1.6, Hệ quả 2.1.7, Định lí 2.1.8, Hệ quả 2.1.9; áp dụng những kết quả này chứng minh một số định lí và hệ quả ở tài liệu [1]: Định lí 2.2.1, Định lí 2.2.2, Hệ quả 2.2.3; xây dựng được ví dụ minh họa ánh xạ thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng nhưng không thỏa mãn điều kiện (B) trong không gian kiểu-mêtric và ví dụ minh hoạ cho Định lí 2.1.8: Ví dụ 1.2.4,Ví dụ 2.2.4.

Các kết quả trên đã được trình bày trong Hội nghị sinh viên nghiên cứu khoa học năm 2013, Trường Đại học Đồng Tháp [20] và một bản thảo bài báo khoa khoa học [9].

2 Kiến nghị

Đề tài có thể phát triển theo các hướng sau:
- Bổ sung một số giá trị mới vào điều kiện co.
- Thay không gian kiểu-mêtric bởi không gian mêtric suy rộng khác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] M. Abbas, G . V. A. Babu, and G. N. Alemayehu, *On common fixed points of weakly compatible mapping satisfyings generalized condition* (B), Filomat **25**(2011), no. 2, 9-19.

[2] M. Abbas and G. Jungck, *Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 416-420.

[3] M. A. Al-Thagafi, N. Shahzad M. A. Al-Thagafi, and N. Shahzad, *Non-commuting selfmaps and invariant approximation*, Nonlinear Anal. **64** (2006), 2777-2786.

[4] R. P. Agarwal, M. Meehan, and D. O'Regan, *Fixed point theory and applications*, Cambridge University Press 2004.

[5] T. V. An, N. V. Dung, and N. T. Hieu, *Further results on 2-metric spaces*, J. Sci. Vinh Univ. **41** (2012), no. 3A, 1-10.

[6] G. V. R. Babu, M. L. Sandhya and M. V. R. Kameswari, *A note on a fixed point theorem of Berinde on weak contractions*, Carpathian J. Math. **24** (2008), no. 1, 08-12.

[7] K. P. Chi, E. Karapinar, and T. D. Thanh, *A generalization of the Meir-Keeler type contraction*, Arab J. Math. Sci. **18** (2012), 141-148.

[8] N. V. Dung, *On coupled common fixed points for mixed weakly monotone maps in partially ordered S-metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. 2013:**48** (2013), 1-24.

[9] N. V. Dũng và N. T. A. Nguyệt, *Điểm bất động chung cho hai ánh xạ thỏa mãn điều kiện* (B) *suy rộng trong không gian kiểu mêtric* (2014), bài gửi đăng.

[10] N. T. Hieu, N. T. T. Ly, and N. V. Dung, *A generalization of Ciric quasicontractions for maps on S-metric spaces*, Thai J. Math. (2014), accepted paper.

[11] N. T. Hieu and V. T. L. Hang, *Coupled fixed point theorems for generalized α-ψ-contactive mappings in partially ordered metric-type spaces*, (2014), preprint.

[12] G. Jungck, *Compatible mappings and common fixed points*, Int. J Math. Math. Sci. **9**(4) (1986), 771-779.

[13] G. Jungck, *Common fixed points for noncontinuous nonself maps on nonmetric spaces*, Far East J. Math. Sci. **9**(4) (1996), 199-215.

[14] R. Kannan, *Some results on fixed points*, Bull. Calcutta Math. Soc. **10** (1968), 71-76.

[15] E. Karapinar, K. P. Chi, and T. D. Thanh, *A generalization of Ciric quasicontractions*, Abstr. Appl. Anal. **2012** (2012), 1-9.

[16] M. A. Khamsi, *Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, Fixed Point Theory Appl. **2010** (2010), 1-7.

[17] M. A. Khamsi and N. Hussain, *KKM mappings in metric type spaces*, Nonlinear Anal. **73** (2010), 3123-3129.

[18] N. V. Luong and N. X. Thuan, *Coupled fixed points in partially ordered metric spaces and application*, Nonlinear Anal. **74** (2011), no. 3, 983-992.

[19] N. V. Luong and N. X. Thuan, *Fixed point theorem for generalized weak contractions satisfying rational expressions in ordered metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. 2011:**46** (2011), 1-10.

[20] N. T. A. Nguyệt và N. V. Dũng, *Định lí điểm bất động chung cho hai ánh xạ co suy rộng trong không gian kiểu-mêtric*, Kỷ yếu hội nghị sinh viên nghiên cứu khoa học năm 2013, Lĩnh vực tự nhiên (2013), 85-91.

[21] S. Sedghi and N. V. Dung, *Fixed point theorems on S-metric spaces*, Mat. Vesnik **66** (2014), no.1, 113-124.

[22] S. Sessa, *On a weak commutativity condition of mappings in fixed point consideration*, Publ. Int. Math. **32** (1982), 149-153.

PHỤ LỤC

1. N. T. A. Nguyệt và N. V. Dũng, *Định lí điểm bất động chung cho hai ánh xạ co suy rộng trong không gian kiểu-mêtric*, Kỷ yếu hội nghị sinh viên nghiên cứu khoa học năm 2013, Lĩnh vực tự nhiên (2013), 85-91.

2. N. V. Dũng và N. T. A. Nguyệt, *Điểm bất động chung cho hai ánh xạ thỏa mãn điều kiện* (B) *suy rộng trong không gian kiểu mêtric* (2014), bài gửi đăng.